ZORRO

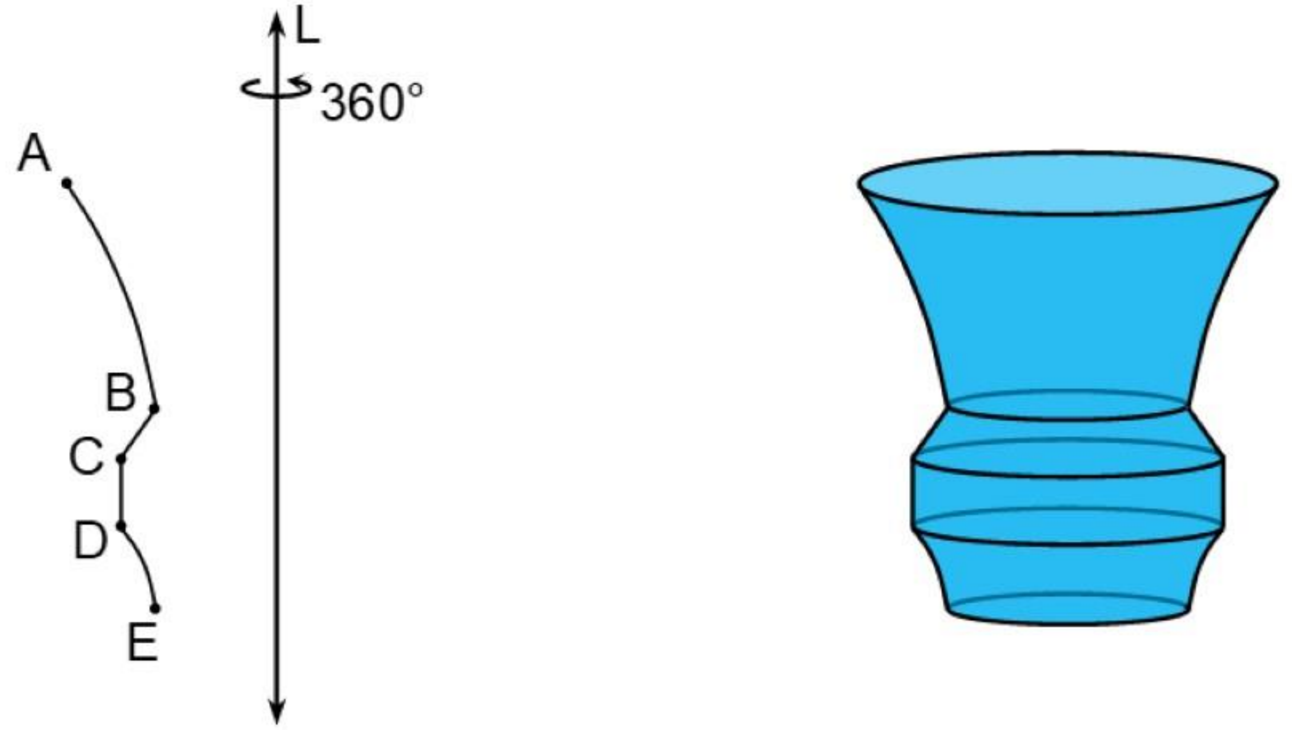
Profesor
Edson Curahua

GEOMETRÍA

GRUPO PITÁGORAS

SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

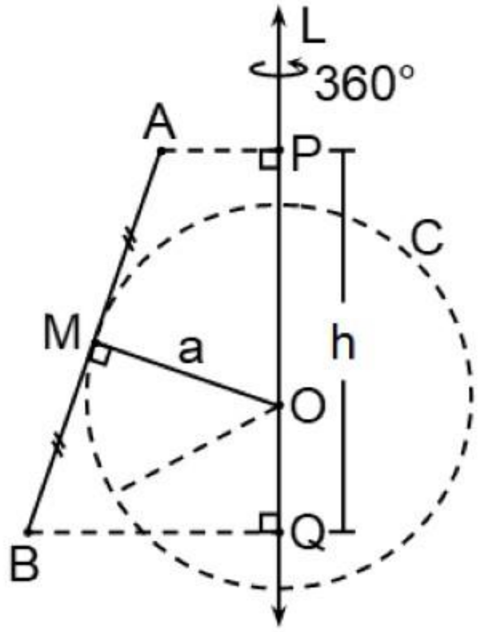
Definición.- Se denomina ***superficie de revolución*** a la superficie que se genera por la rotación de una línea plana (recta o curva) alrededor de una recta coplanar denominado eje de giro.

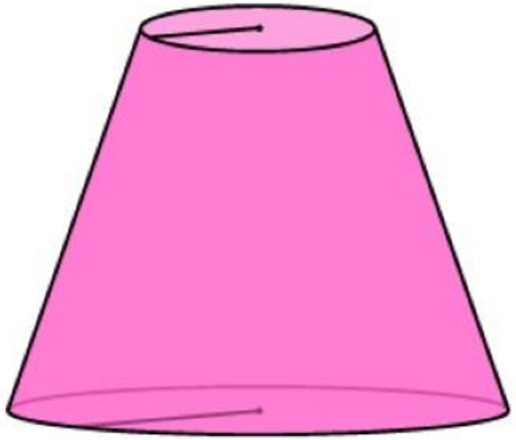


SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

SUPERFICIE GENERADA POR UN SEGMENTO

Teorema.- El área de la superficie generada por un segmento que gira una vuelta alrededor de un eje coplanar y no secante al segmento; es igual al producto de las longitudes de la circunferencia con centro en el eje, tangente en el punto medio del segmento y la proyección ortogonal del segmento sobre el eje.



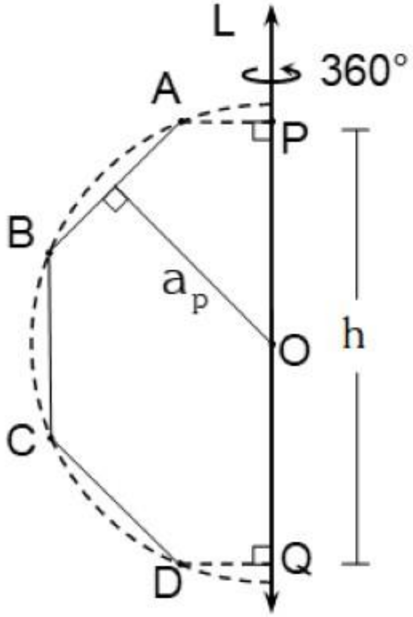


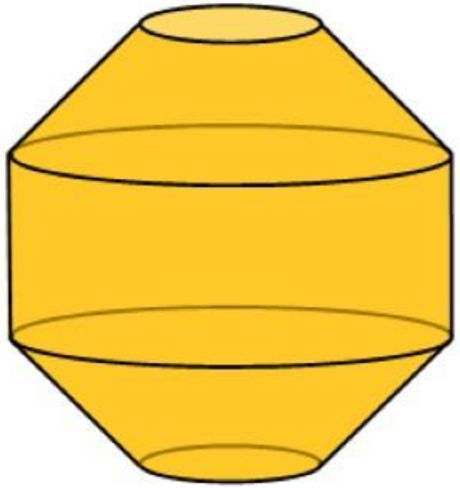
$$\boxed{S_{S.G.} = (2\pi a).h}$$

SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

SUPERFICIE GENERADA POR UNA POLIGONAL REGULAR

Teorema de Arquímedes.- El área de la superficie generada por la rotación de una poligonal regular al girar 360° alrededor de un eje coplanar que contiene al centro y no secante a la poligonal regular, es igual al producto de la longitudes de la circunferencia de radio congruente a la apotema de la poligonal regular y la proyección ortogonal de la poligonal sobre el eje.

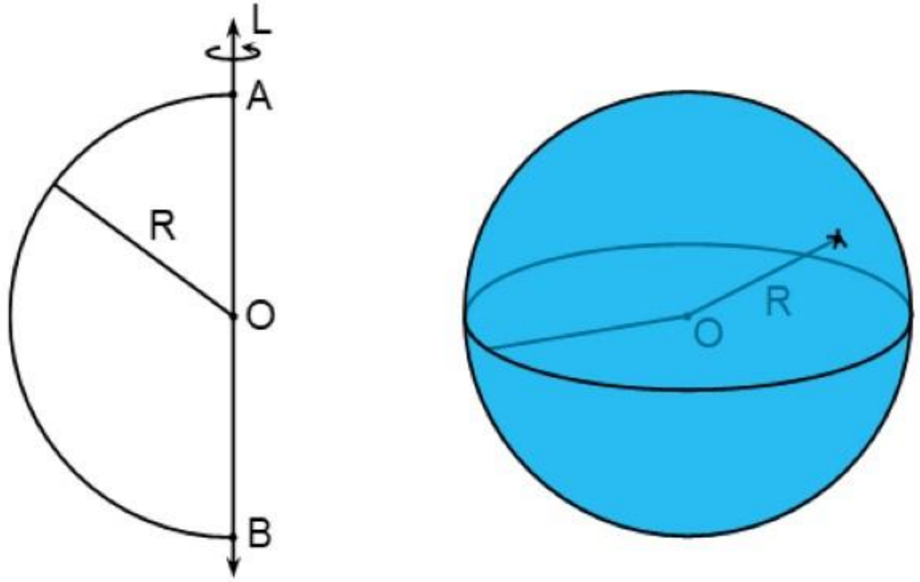




$$S_{S.G.} = (2\pi a_p).h$$

SUPERFICIE ESFÉRICA

Definición.- Se denomina ***superficie esférica*** a la superficie generada por la rotación de una semicircunferencia, al girar una vuelta alrededor de un eje que contiene al diámetro.

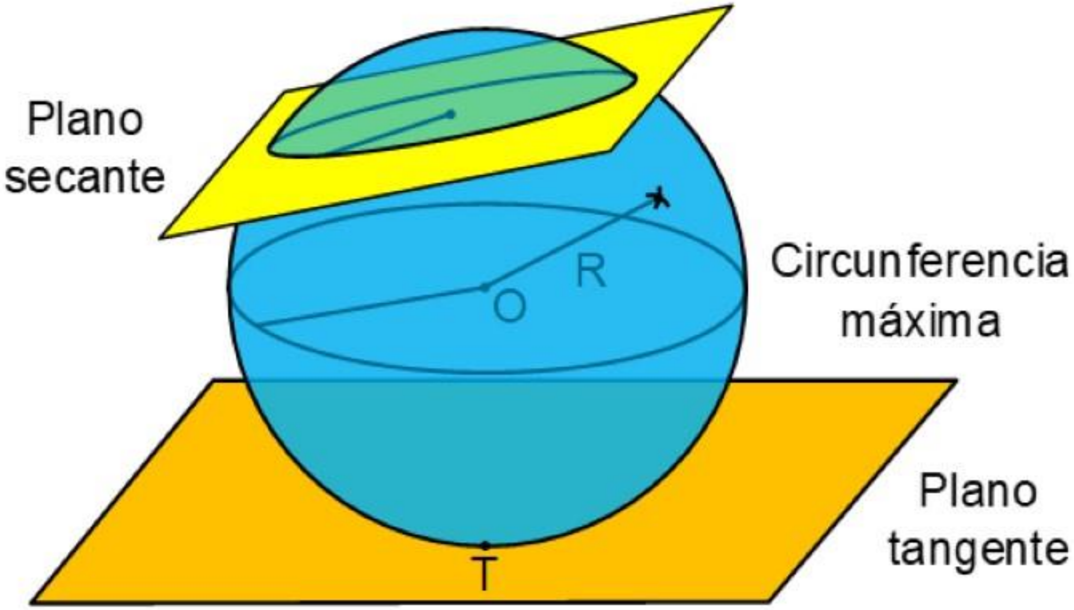


$$S_{S.E.} = 4\pi R^2$$

Definición.- Un plano es secante a una superficie esférica si la intersección es una circunferencia.

Definición.- Un plano es tangente a una superficie esférica si la intersección es un punto.

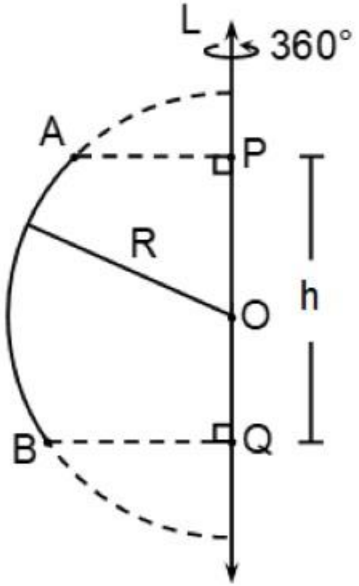
Definición.- Se denomina ***circunferencia máxima***, a la circunferencia determinada por un plano secante a una superficie esférica que contiene al centro.

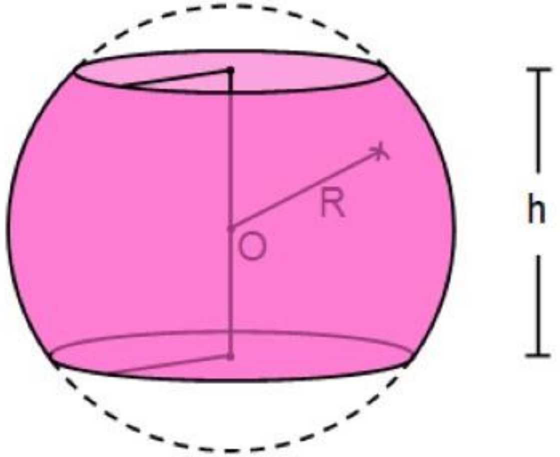


ZONA ESFÉRICA

ZONA ESFÉRICA

Definición.- Se denomina ***zona esférica*** a la parte de una superficie esférica comprendida entre dos circunferencias determinadas por dos planos paralelos entre si, secantes a la superficie esférica.

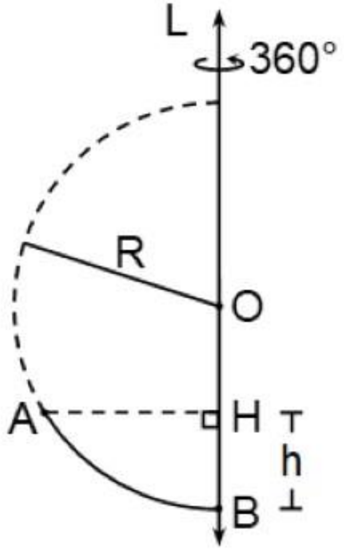


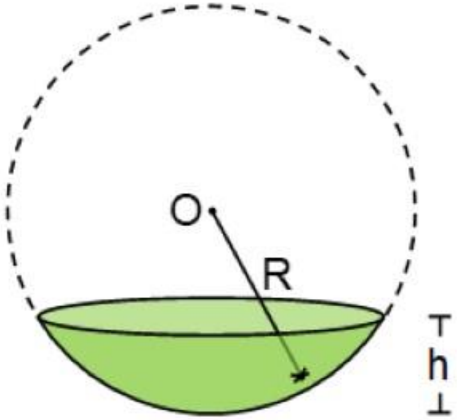


$$S_{Z.E.} = (2\pi R).h$$

CASQUETE ESFÉRICO

Definición.- Se denomina ***casquete esférico*** a la parte de una superficie esférica determinado por un plano secante.



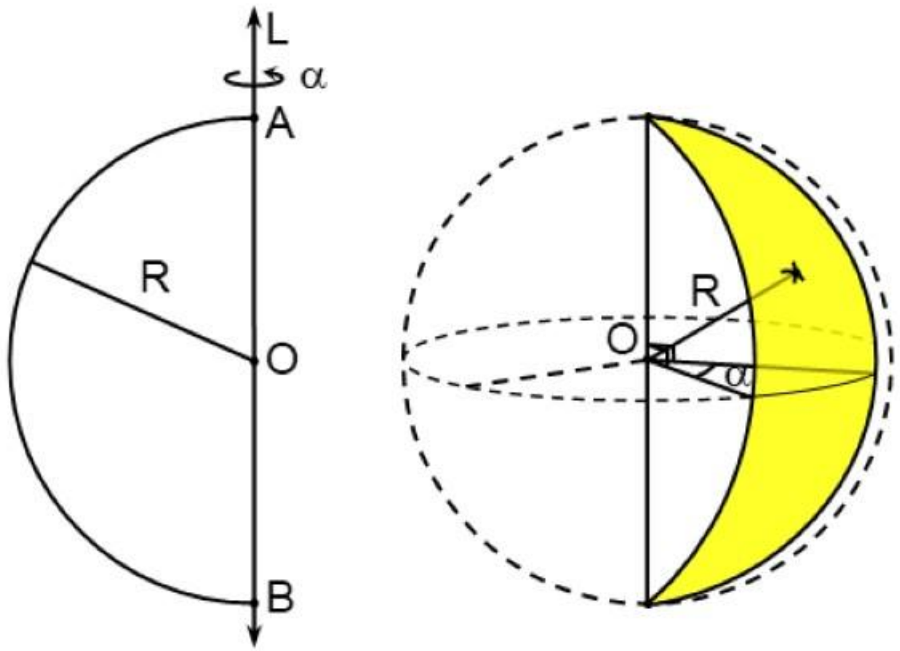


$$S_{C.E.} = (2\pi R).h$$

HUSO ESFÉRICO

HUSO ESFÉRICO

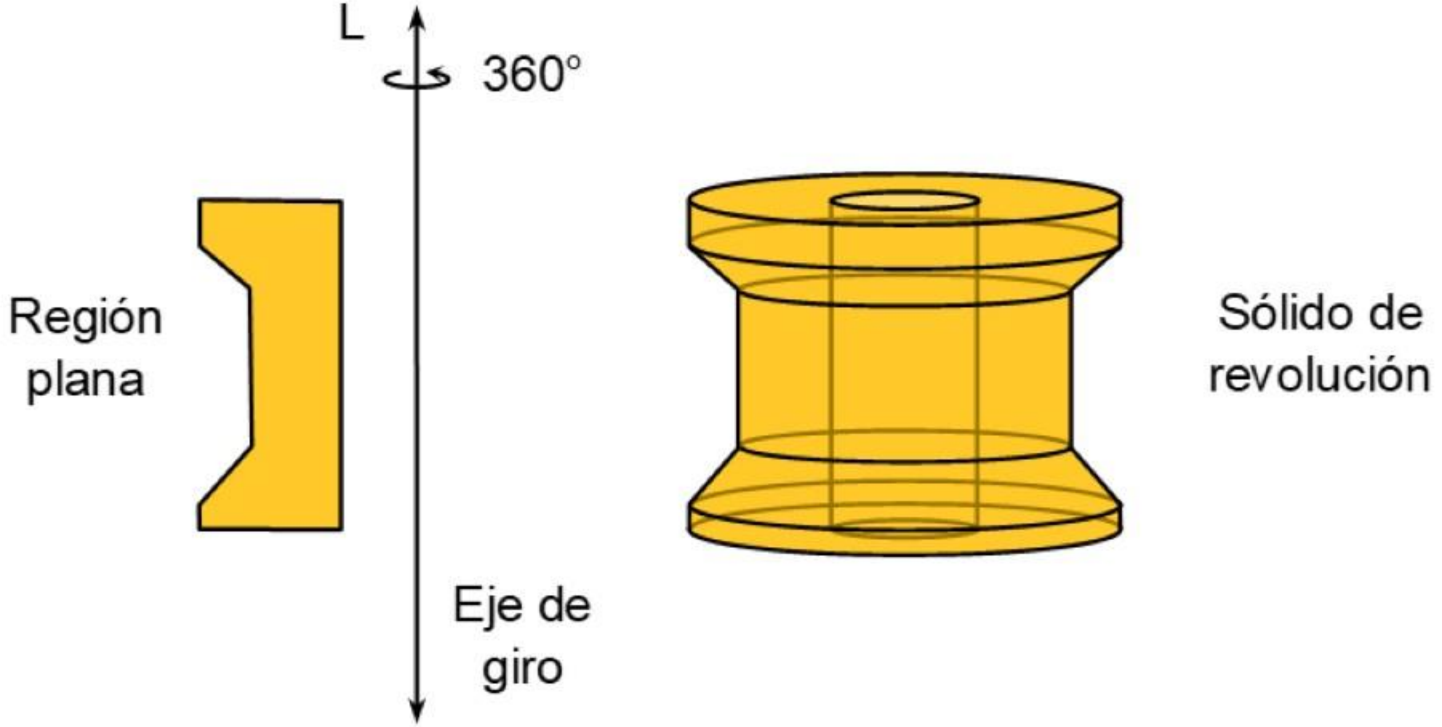
Definición.- Se denomina ***huso esférico*** a la parte de una superficie esférica, comprendida entre dos semicircunferencias máximas que tienen en común el diámetro.



$$S_{H.E.} = (4\pi R^2).\frac{\alpha}{360}$$

SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

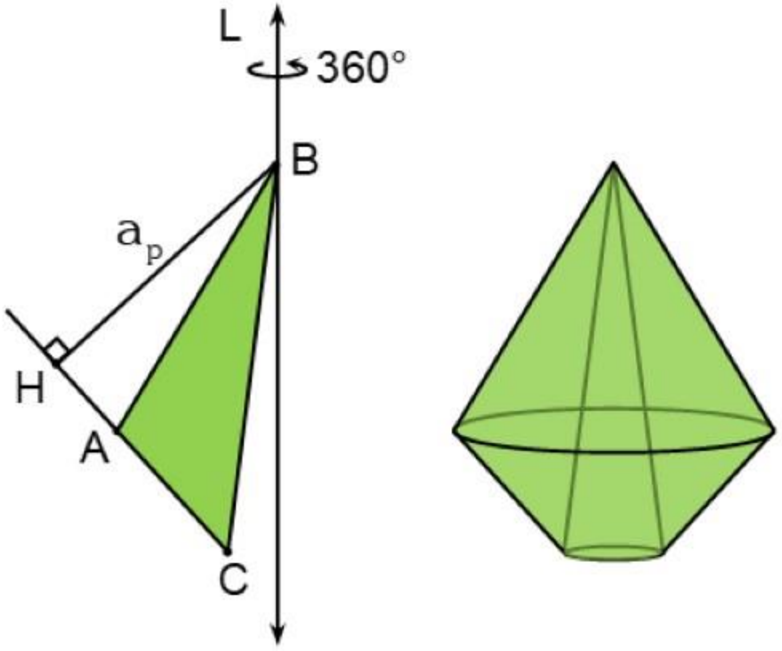
Definición.- Se denomina ***sólido de revolución*** al sólido generado al girar una vuelta una región plana alrededor de un eje coplanar y no secante a la región plana.



SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

SÓLIDO GENERADO POR UNA REGIÓN TRIANGULAR

Teorema.- El volumen del sólido generado por una región triangular al girar una vuelta alrededor de un eje coplanar que contiene sólo a un vértice; es igual, a un tercio del producto del área de la superficie generada por el lado opuesto a dicho vértice y la longitud de la altura correspondiente a este lado.

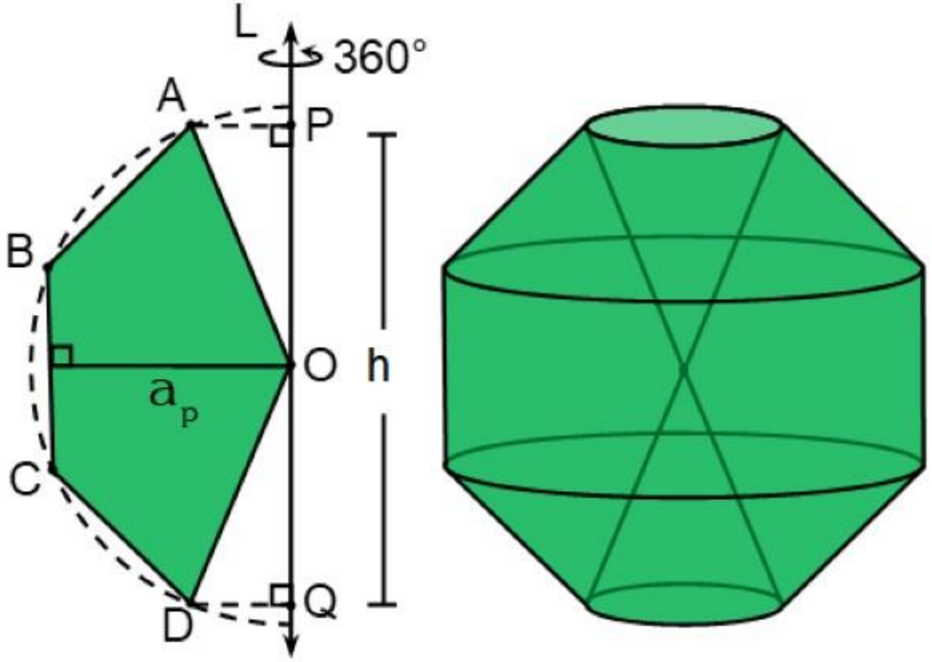


$$V_{S.G.} = \frac{1}{3}\left(S_{\overline{AC}}\right).\,a_p$$

SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

SÓLIDO GENERADO POR UN SECTOR POLÍGONAL REGULAR

Teorema de Arquímedes.- El volumen del sólido generado por un sector poligonal regular al girar una vuelta alrededor de un eje coplanar no secante a la poligonal regular y que contiene al centro, es igual a los dos tercios del producto del área del círculo cuyo radio es congruente a la apotema de la poligonal regular y la longitud de la proyección ortogonal de la poligonal sobre el eje.

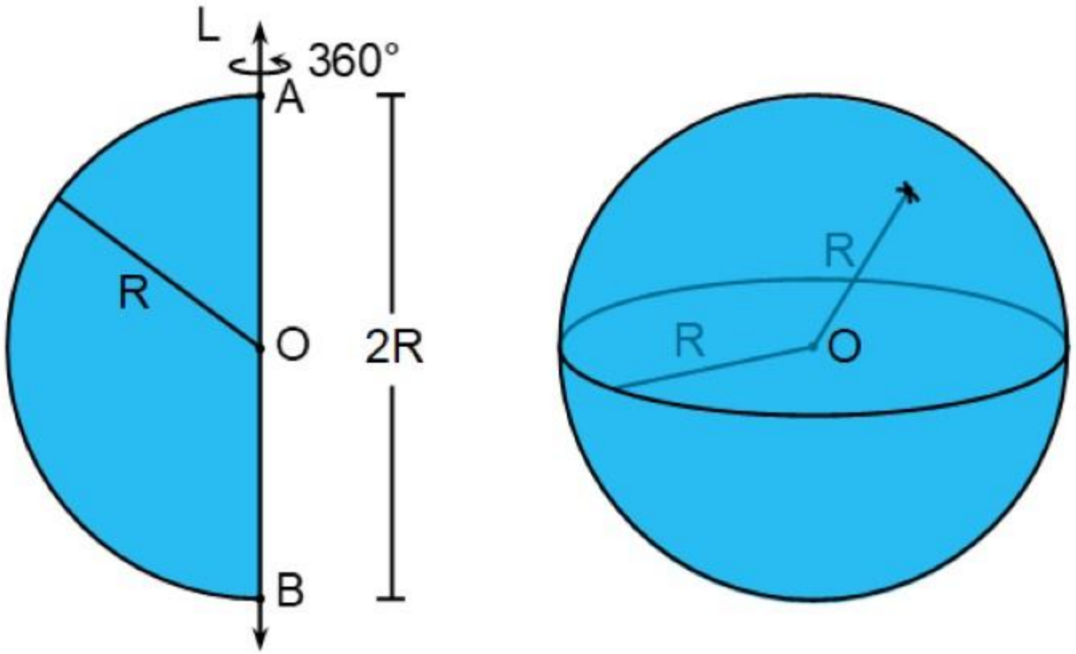


$$V_{S.G.} = \frac{1}{3}(S_{ABCD}).\,a_p$$

$$V_{S.G.} = \frac{2}{3}(\pi a_p^2).\,h$$

ESFERA

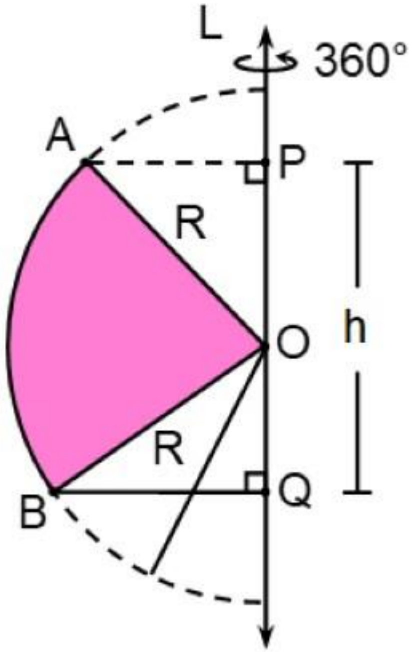
Definición.- Se denomina ***esfera*** al sólido generado por la rotación de un semicírculo al girar una vuelta alrededor de un eje que contiene al diámetro.

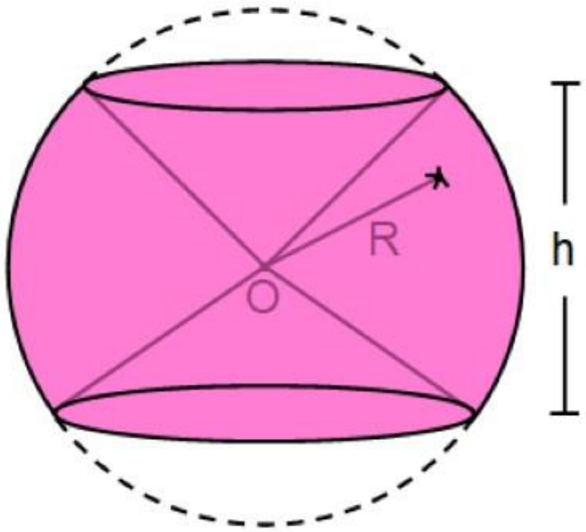


$$V_E = \frac{4}{3}\pi R^3$$

SECTOR ESFÉRICO

Definición.- Se denomina ***sector esférico*** al sólido generado por la rotación de un sector circular al girar una vuelta alrededor de una eje coplanar no secante al arco correspondiente (excepto en los extremos) y que contiene al centro.



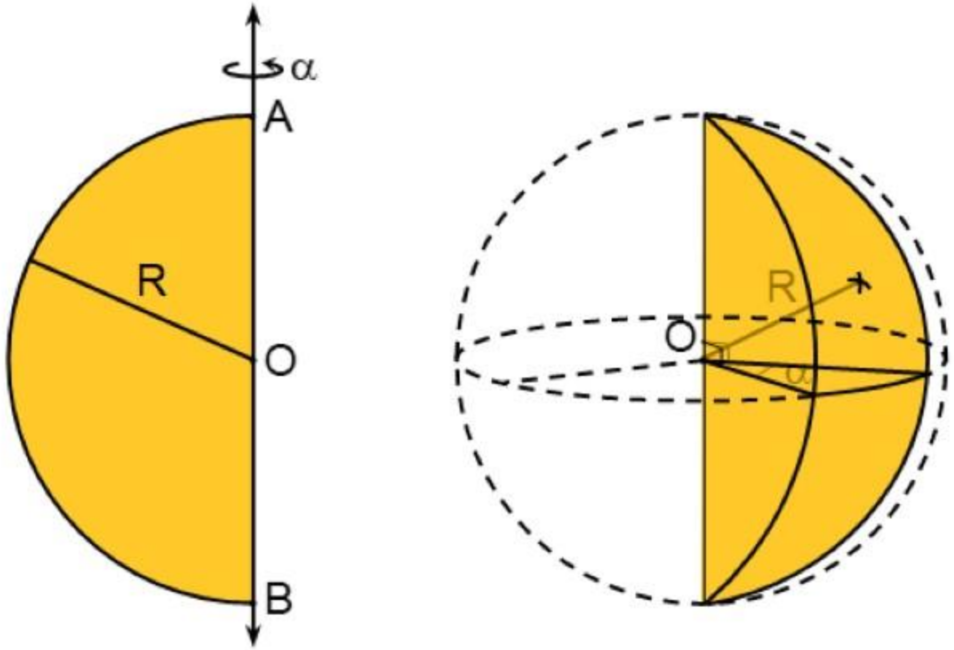


$$V_{S.E.} = \frac{2}{3}(\pi R^2).h$$

CUÑA ESFÉRICA

CUÑA ESFÉRICA

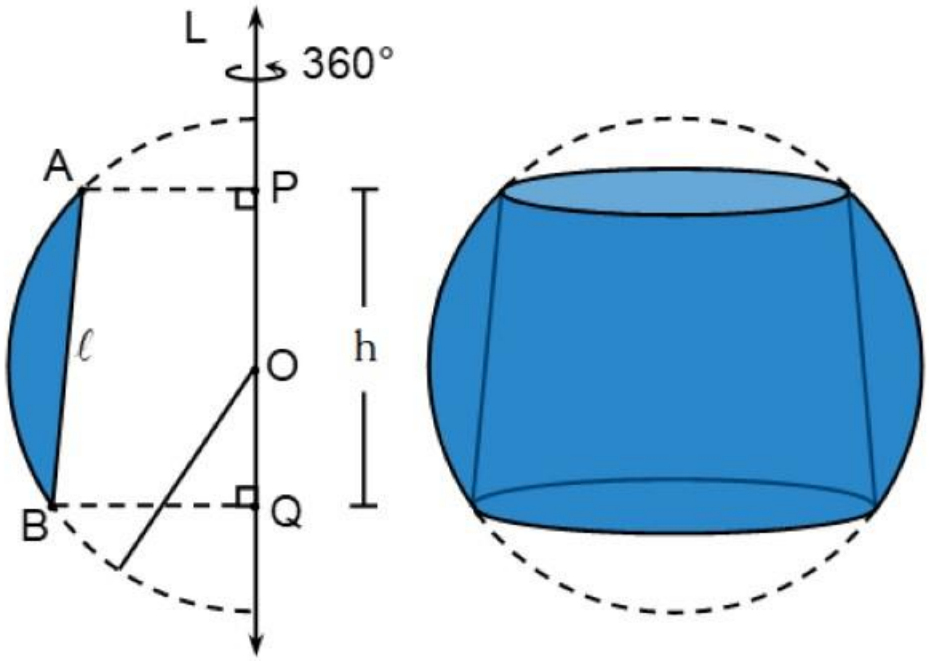
Definición.- Se denomina ***cuña esférica*** a la parte de una esfera comprendida entre dos semicírculos máximos que tienen en común el diámetro.



$$V_{C.E.} = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) \cdot \frac{\alpha}{360}$$

ANILLO ESFÉRICO

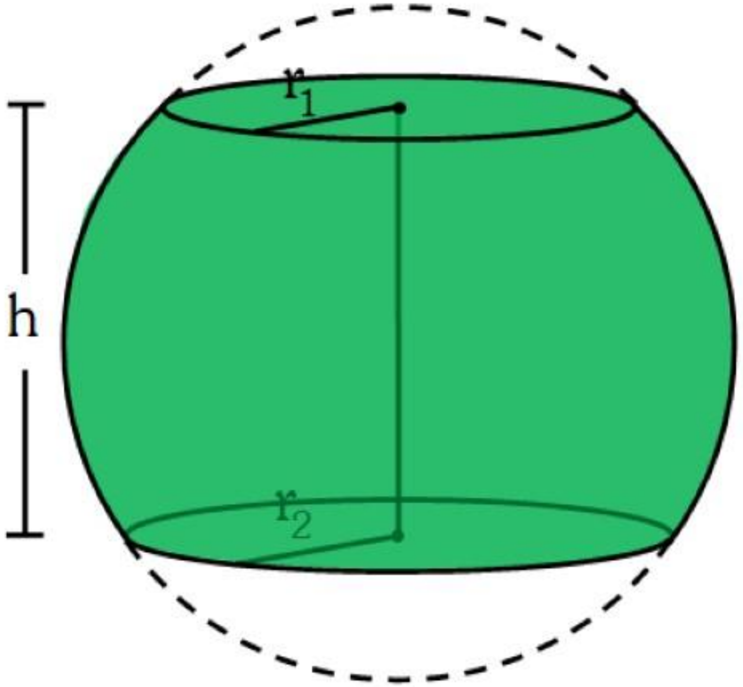
Definición.- Se denomina ***anillo esférico*** al sólido generado al girar una vuelta un segmento circular alrededor de un eje coplanar no secante al arco correspondiente y que contiene al centro.



$$V_{A.E.} = \frac{1}{6}\pi\ell^2 . h$$

SEGMENTO ESFÉRICO DE DOS BASES

Definición.- Se denomina ***segmento esférico de dos bases*** a la parte de una esfera comprendido entre dos círculos determinados por dos planos paralelos entre si, secantes a la esfera.

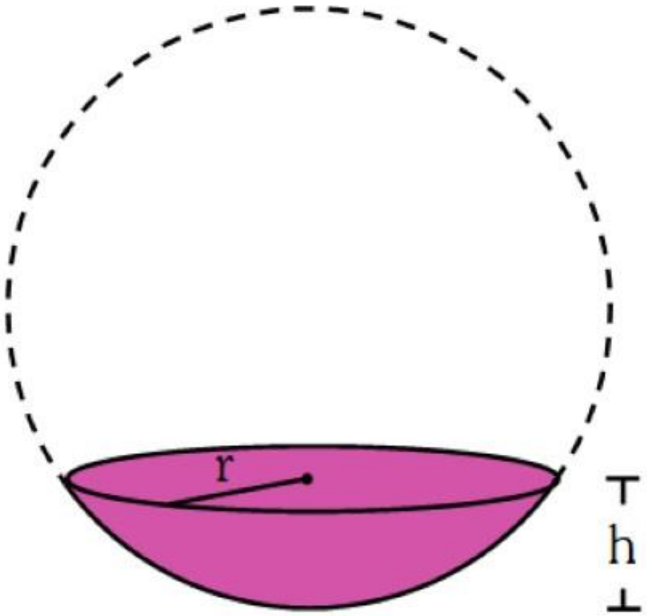


$$V_{S.E.} = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(r_1^2 + r_2^2).h$$

SEGMENTO ESFÉRICO DE UNA BASE

SEGMENTO ESFÉRICO DE UNA BASE

Definición.- Se denomina ***segmento esférico de una base*** a la parte de una esfera determinada por un plano secante.

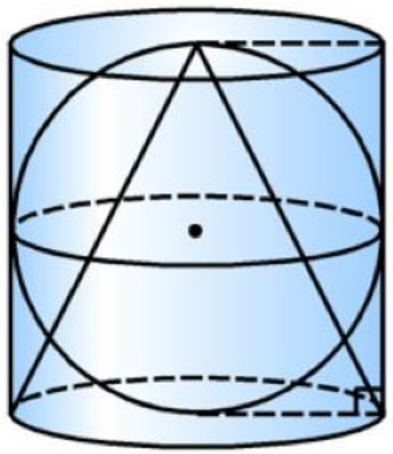


$$V_{S.E.} = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi r^2 . h$$

PROPIEDADES

TEOREMA DE ARQUÍMEDES

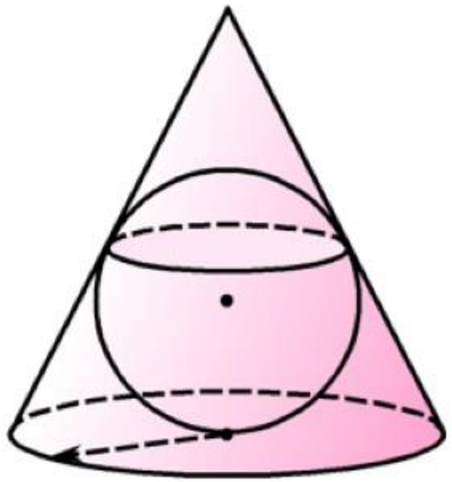
Esfera y cono inscritos en un cilindro de revolución. La razón entre sus volúmenes es la siguiente:



$$\frac{V_{\text{Cilindro}}}{3} = \frac{V_{\text{Esfera}}}{2} = \frac{V_{\text{Cono}}}{1}$$

PROPIEDAD

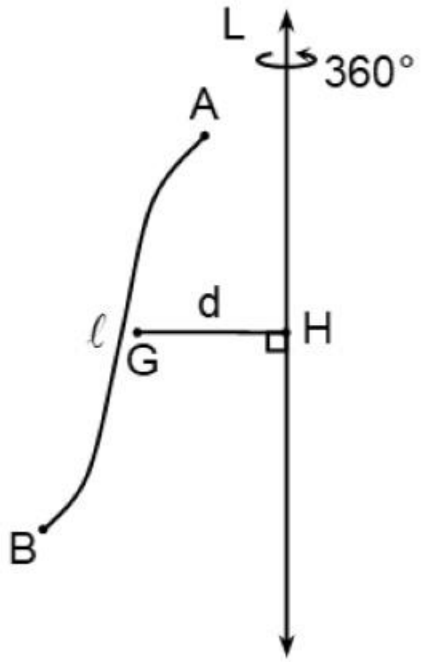
La razón entre los volúmenes de un cono y el de la esfera inscrita, es igual a la razón entre las áreas de sus superficies.

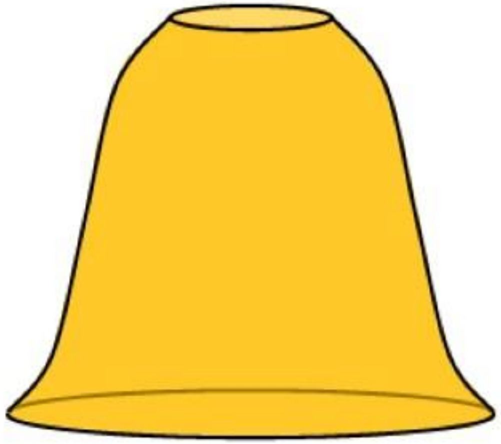


$$\frac{V_{\text{Cono}}}{V_{\text{Esfera}}} = \frac{S_{\text{Cono}}}{S_{\text{Esfera}}}$$

ÁREA DE LA SUPERFICIE GENERADA POR UNA LÍNEA PLANA

Teorema.- El área de la superficie generada por una línea plana al girar un vuelta alrededor de una recta coplanar y no secante a dicha línea, es igual al producto de la longitudes de la circunferencia descrita por el centro de gravedad y la línea.



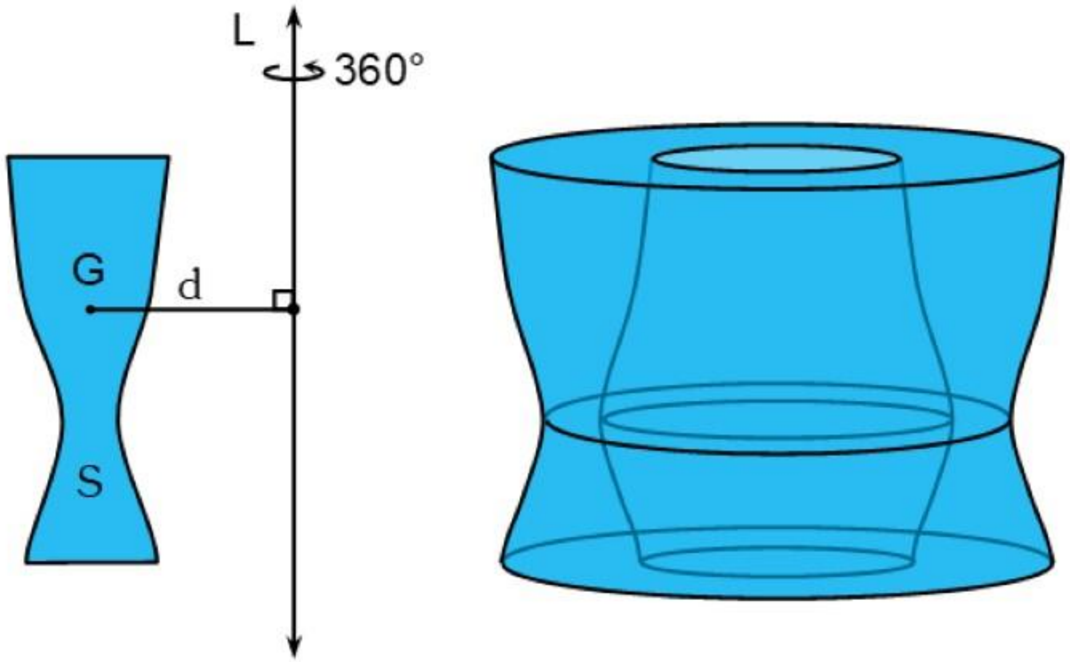


$$S_{S.G.} = (2\pi d).\,\ell$$

TEOREMAS DE PAPPUS

VOLUMEN DEL SÓLIDO GENERADO POR UNA REGIÓN PLANA

Teorema.- El volumen del sólido generado por una región plana al girar una vuelta alrededor de una recta coplanar que no contiene puntos interiores de dicha región, es igual al producto de la longitud de la circunferencia descrita por el centro de gravedad y el área de la región.

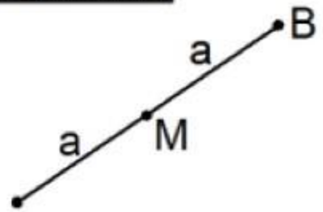


$$V_{S.G.} = (2\pi d).S$$

CENTROS DE GRAVEDAD

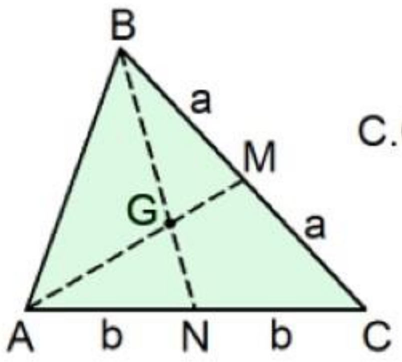
CENTROS DE GRAVEDAD DE ALGUNAS FIGURAS

Segmento



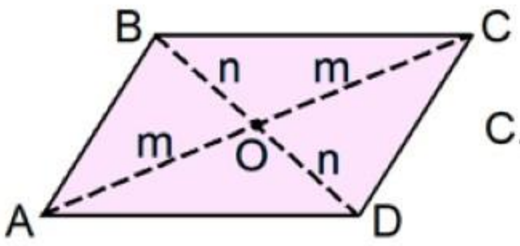
C.G. = M

Región triangular



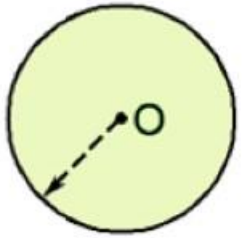
C.G. = G

Paralelogramo o región paralelográmica



C.G. = O

Circunferencia o círculo



C.G. = O

NOTAS:

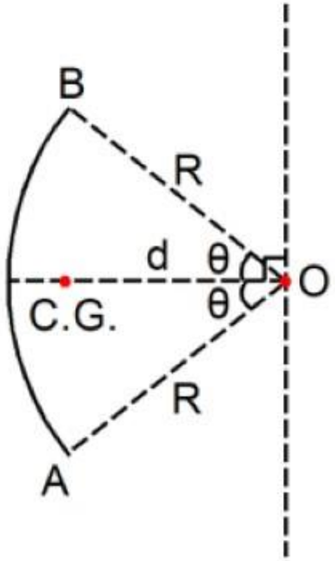
01. El centro de gravedad de un triángulo está ubicado en el incentro de su triángulo mediano.

02. Si una figura tiene eje de simetría, entonces su centro de gravedad estará ubicado precisamente en dicho eje. Por ejemplo en el trapecio isósceles el centro de gravedad será algún punto que pertenece a la mediatriz de sus bases.

03. El centro de gravedad de una figura que tiene centro de simetría será precisamente dicho centro de simetría. Éste es el caso de los polígonos regulares.

CENTROS DE GRAVEDAD

CENTRO DE GRAVEDAD DE UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA

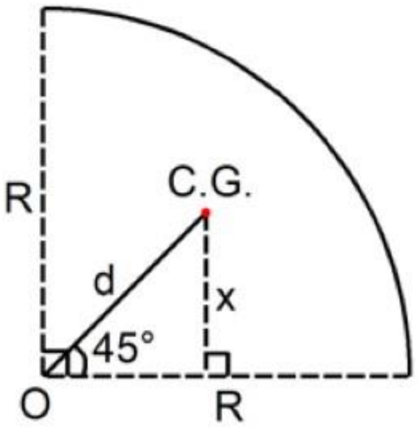


$$d = \frac{R.\,\text{sen}\theta}{\theta}$$

Donde R representa la medida del radio del arco y θ está en radianes.

APLICACIONES

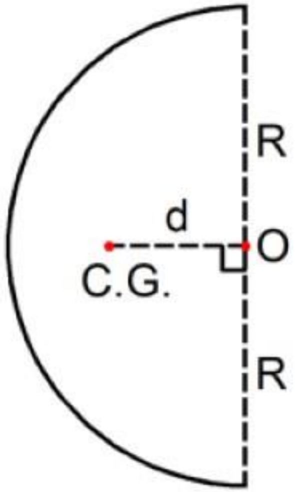
Centro de gravedad de un cuadrante.



$$d = \frac{2R\sqrt{2}}{\pi}$$

$$x = \frac{2R}{\pi}$$

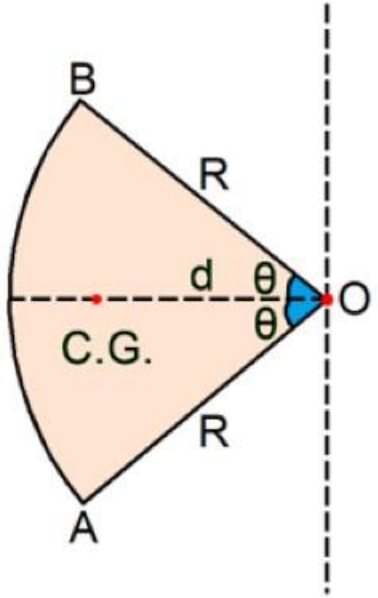
Centro de gravedad de una semicircunferencia.



$$d = \frac{2R}{\pi}$$

CENTROS DE GRAVEDAD

CENTRO DE GRAVEDAD DE UN SECTOR CIRCULAR

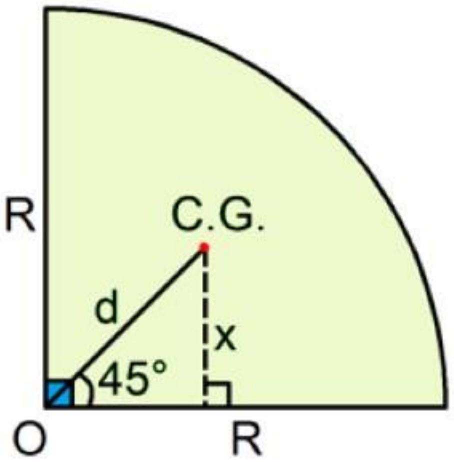


$$d = \frac{2R.\,\text{sen}\theta}{3\theta}$$

Donde R representa la medida del radio del sector y θ está en radianes.

APLICACIONES

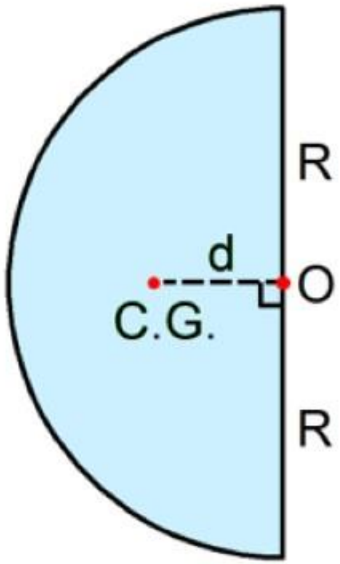
Centro de gravedad de un sector cuadrantal.



$$d = \frac{4R\sqrt{2}}{3\pi}$$

$$x = \frac{4R}{3\pi}$$

Centro de gravedad de un semicírculo.

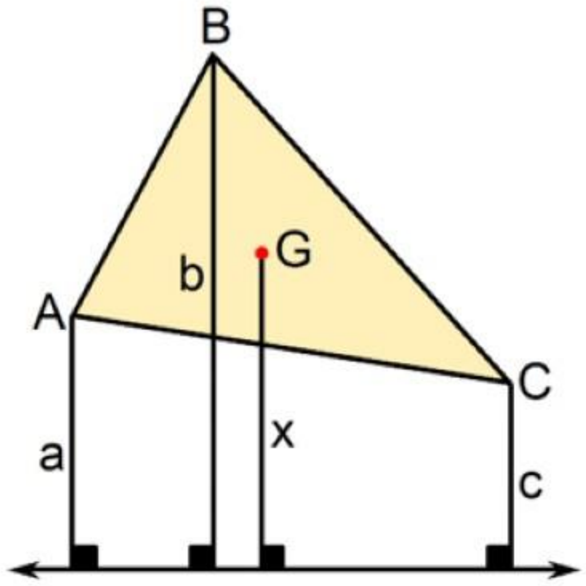


$$d = \frac{4R}{3\pi}$$

PROPIEDADES

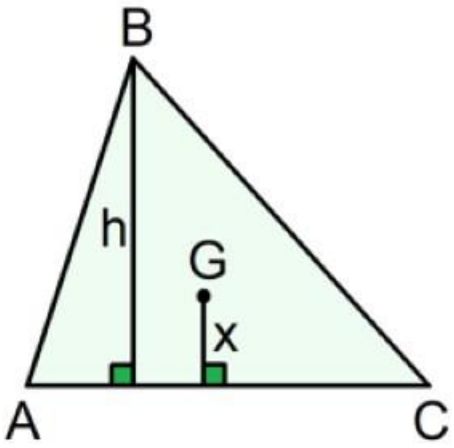
Las siguientes propiedades serán de mucha utilidad en la resolución de problemas.

01. Si G es baricentro del triángulo ABC, se cumple:



$$x = \frac{a+b+c}{3}$$

02. Si G es baricentro del triángulo ABC, entonces:



$$x = \frac{h}{3}$$

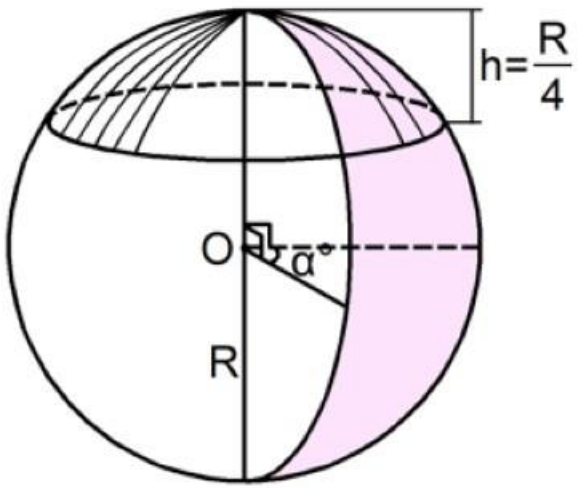
PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMAS

01. En una esfera de radio R una zona esférica de altura R/4 es equivalente a un huso esférico. Calcule la medida del ángulo correspondiente al huso.

A) 15 B) 30 C) 37
D) 45 E) 60

Resolución:



Por dato:

$$S_{\text{Zona esférica}} = S_{\text{Huso esférico}}$$

$$2\pi R.\frac{R}{4} = (4\pi R^2).\frac{\alpha}{360}$$

$$\therefore \alpha = 45$$

Rpta: D

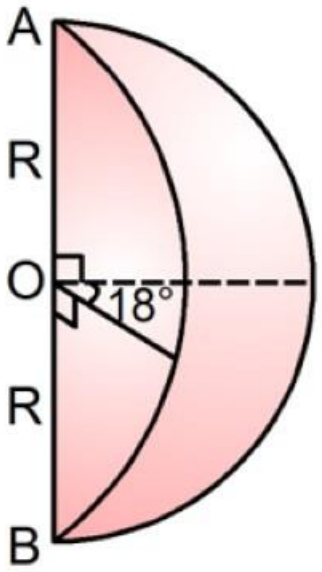
PROBLEMAS

02. Calcular el volumen de una cuña esférica, sabiendo que los semicírculos que la limitan determinan un ángulo que mide 18 y el área total de la cuña es 6π/5.

A) 9π/20 B) 9π/4 C) 5π/6

D) 7π/3 E) π/15

Resolución:



Por dato:

$$S_{T(\text{Cuña})} = \frac{6\pi}{5}$$

$$S_{\text{Huso}} + \pi R^2 = \frac{6\pi}{5}$$

$$4\pi R^2 . \frac{18}{360} + \pi R^2 = \frac{6\pi}{5}$$

$$\frac{6\pi R^2}{5} = \frac{6\pi}{5}$$

$$\rightarrow R = 1$$

Finalmente, se pide:

$$V_{\text{Cuña}} = \frac{4}{3}\pi R^3 . \frac{\alpha}{360} = \frac{4}{3}\pi(1)^3 . \frac{18}{360}$$

$$\therefore V_{\text{Cuña}} = \frac{\pi}{15}$$

Rpta: E

PROBLEMAS

03. En una superficie esférica se inscribe un cono de revolución, cuya base divide a la superficie esférica en 2 casquetes cuyas áreas están en la relación como 1:3. Si el radio de la superficie esférica mide 8 y el cono se encuentra en el mayor casquete, entonces el volumen (en u^3) del sólido limitado por el cono es:

A) 192π B) 190π C) 188π

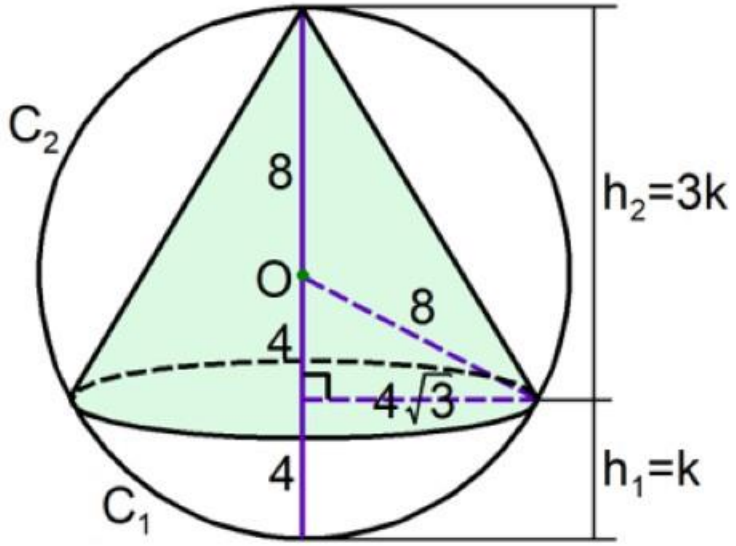
D) 186π E) 184π

Resolución:

Por dato:

$$\frac{S_{\text{Casquete}(1)}}{S_{\text{Casquete}(2)}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2\pi R h_1}{2\pi R h_2} = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{3}$$



Luego se deduce fácilmente que la altura del cono mide 12 y su radio $4\sqrt{3}$.

Por último:

$$V_{\text{CONO}} = \frac{1}{3}\pi(4\sqrt{3})^2 . 12$$

$$\therefore V_{\text{CONO}} = 192\pi$$

Rpta: C

04. Los radios de las bases de un segmento esférico son 4 u y 2 u. Halle su volumen si dichas bases son bases de un tronco de cono circunscriptible a una esfera.

A) $\frac{184\pi\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{184\pi\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{184\pi\sqrt{5}}{3}$

D) $\frac{184\pi\sqrt{7}}{3}$ E) $\frac{184\pi\sqrt{11}}{3}$

Resolución:

Rpta: A

PROBLEMAS

05. La razón entre el volumen de un tronco de pirámide regular cuadrangular, cuyas bases tienen áreas de $4a^2$ y $16a^2$ $(a > 0)$ y el volumen de la esfera inscrita es:

A) $\frac{11}{\pi}$ B) $\frac{9}{\pi}$ C) $\frac{8}{\pi}$

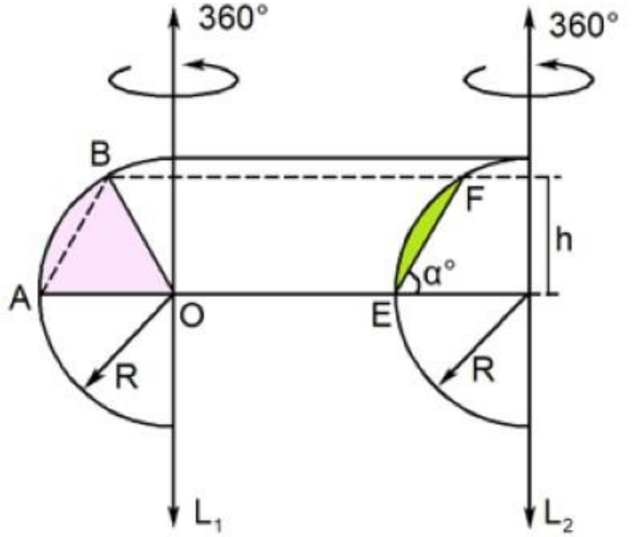
D) $\frac{7}{\pi}$ E) $\frac{\pi}{8}$

Resolución:

Rpta: D

PROBLEMAS

06. Del gráfico calcular el valor de α, sabiendo que el volumen del sólido generado al girar el sector AOB alrededor de L_1 es cuatro veces el volumen del sólido generado por el segmento circular EF al girar alrededor de L_2.



A) 22,5 B) 30 C) 37
D) 45 E) 60

Resolución:

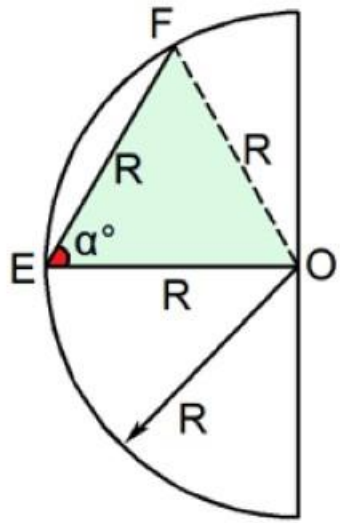
Los sólidos generados, en cada caso, son un sector esférico y un anillo esférico, luego por dato:

$$V_{\text{Sector esférico}} = 4(V_{\text{Anillo esférico}})$$

$$\frac{2}{3}\pi R^2 . h = 4\left(\frac{1}{6}\pi(EF)^2 . h\right)$$

$$\rightarrow R = EF$$

Finalmente:



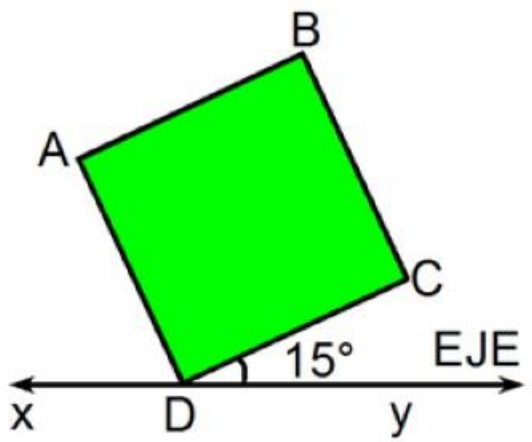
ΔEOF: Equilátero

$$\therefore \alpha = 60$$

Rpta: E

PROBLEMAS

07. Calcular el volumen del sólido generado por la región cuadrada ABCD al girar 360° alrededor del eje coplanar xy. (AB=L)

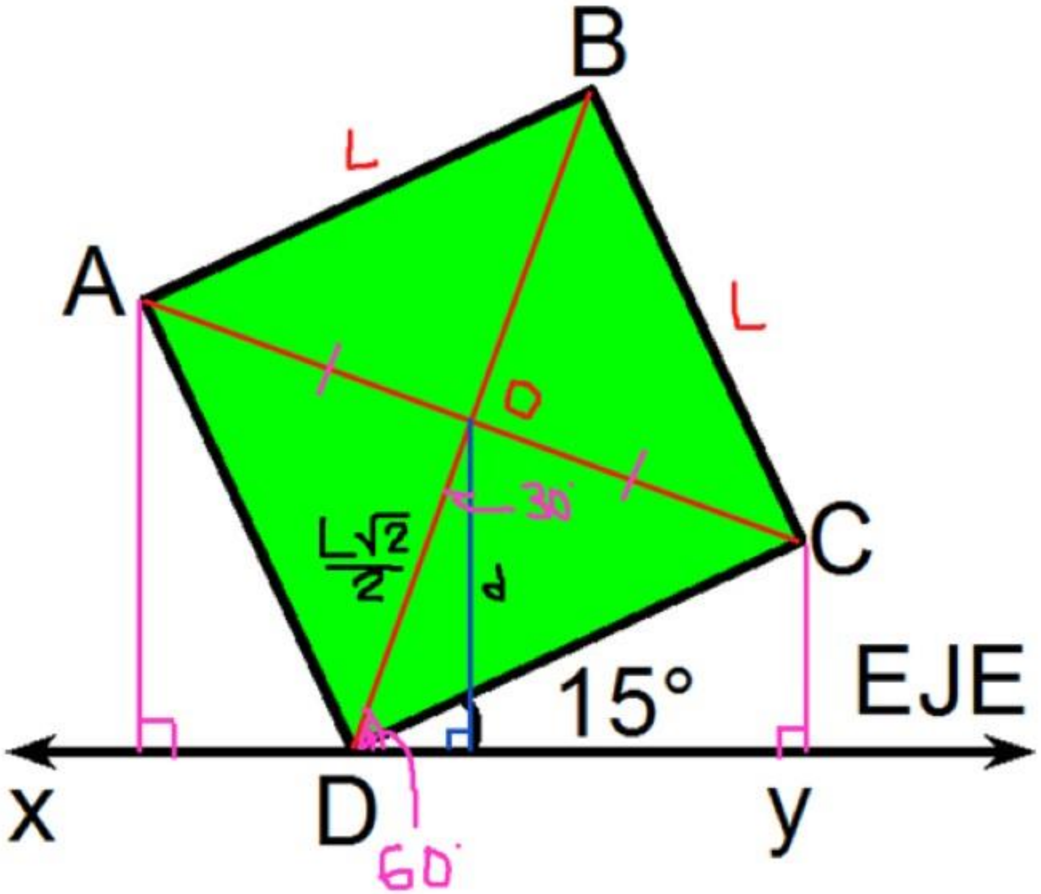


A) $\frac{\pi L^3\sqrt{6}}{2}$ B) $\frac{L^3\sqrt{6}}{3}$ C) $\frac{\pi L^3\sqrt{6}}{4}$

D) $\frac{L^3\sqrt{6}}{2}$ E) $\frac{\pi L^3\sqrt{6}}{3}$

Resolución:

Rpta: D



Por Pappus

$$V_{S.G} = (2\pi d) \cdot L^2$$

$$* \; d = \frac{L\sqrt{6}}{4}$$

Luego:

$$\boxed{V_{S.G} = \frac{\pi L^3 \cdot \sqrt{6}}{2}}$$

PROBLEMAS

08. Una región cuadrada ABCD de lado 10 dm se hace girar 360° alrededor de un eje coplanar exterior que pasa por el vértice D y que forma un ángulo que mide 75° con $\overline{CD}$, entonces el volumen del sólido generado (en dm^3) es:

A) $400\pi\sqrt{3}$ B) $450\pi\sqrt{3}$ C) $500\pi\sqrt{3}$

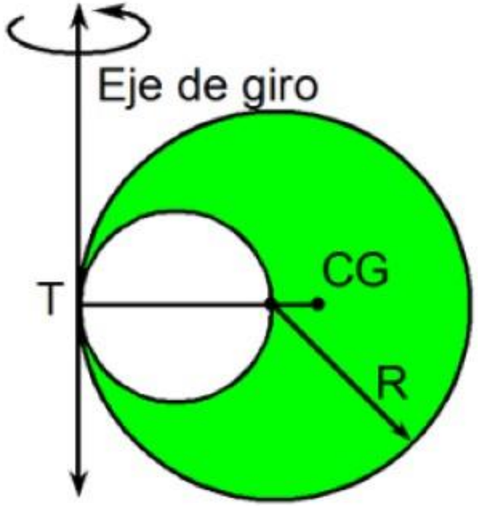
D) $400\pi\sqrt{6}$ E) $500\pi\sqrt{6}$

Resolución:

Rpta: E

PROBLEMAS

09. Halle la distancia del centro de gravedad (CG) de la figura sombreada al eje de giro.

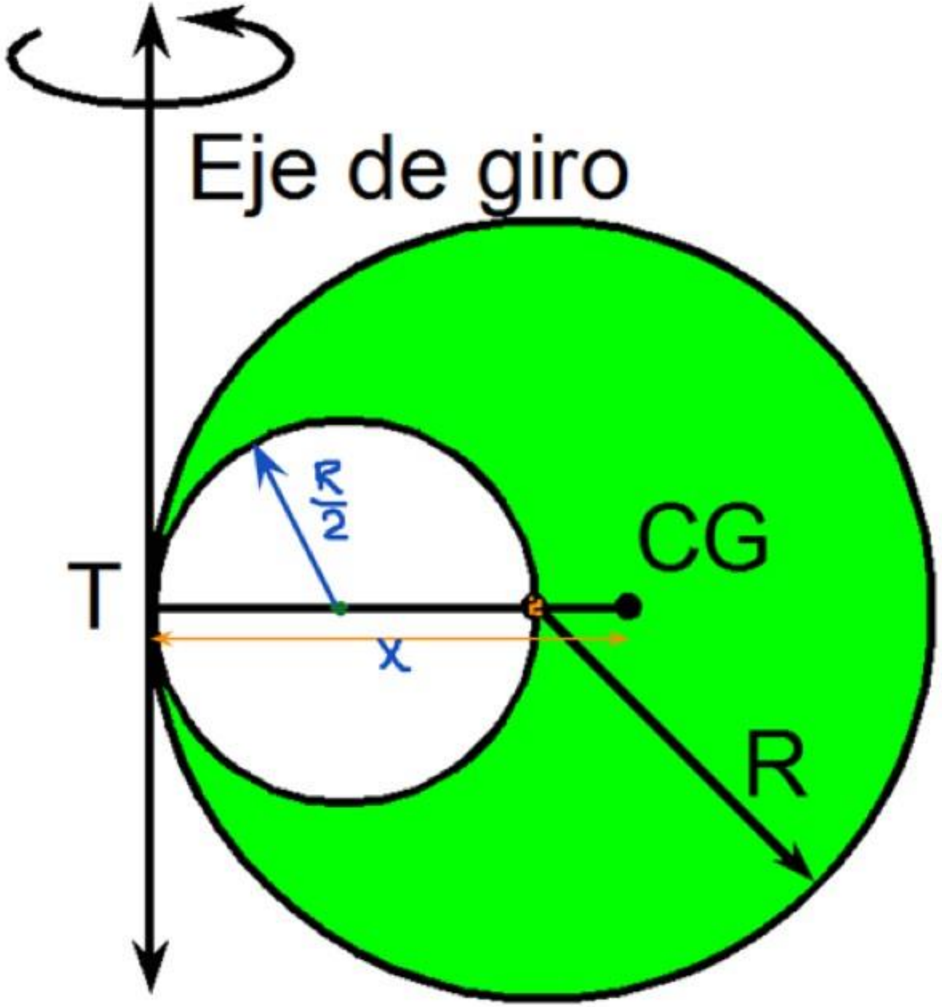


A) $\frac{7}{6}R$ B) $\frac{6}{5}R$ C) $\frac{5}{4}R$
D) $\frac{5}{3}R$ E) $\frac{7}{3}R$

Resolución:

Rpta: A

ura sombreada al eje de giro.



Por Pappus:

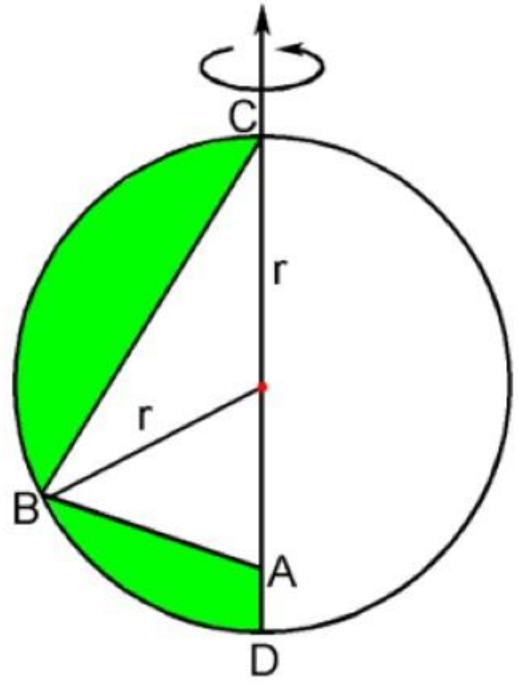
$$\underbrace{V_{SG}}_{(\cancel{2}\cancel{\pi}R)\cancel{\pi}R^{\cancel{2}}-(\cancel{2}\cancel{\pi}\cdot\frac{R}{2})\frac{\cancel{\pi}R^{\cancel{2}}}{4}} = (\cancel{2}\cancel{\pi}x)\cdot\frac{3}{4}\cancel{\pi}R^{\cancel{2}}$$

$$R-\frac{R}{8}=\frac{3x}{4}$$

$$\therefore\ \boxed{x=\frac{7R}{6}}$$

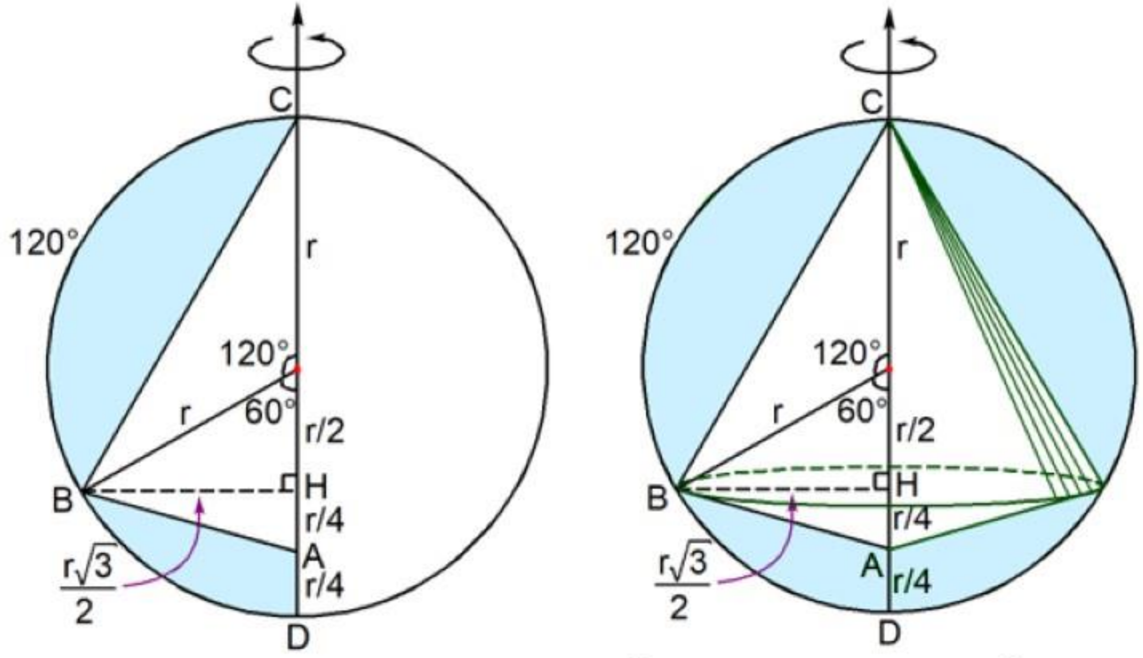
PROBLEMAS

10. Halle el volumen del solido que se genera al girar la figuras sombreada, alrededor del eje diametral $\overline{CD}$, si $m\widehat{BC} = 120$, $r = 2\sqrt[3]{6}$ y $AD = \frac{r}{4}$.



A) 43 π B) 37 π C) 32 π
D) 30 π E) 25 π (UNI 2016-2)

Resolución:



$$V_{S.G.} = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2\frac{3r}{2} - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2\frac{r}{4}$$

Pero: $r = 2\sqrt[3]{6}$

$$\rightarrow V_{S.G.} = 54\pi - 18\pi - 3\pi$$

$$\therefore V_{S.G.} = 43\pi$$

Rpta: A

PROBLEMAS

11. Una cuña esférica es tal que los semicírculos que lo limitan determinan un diedro de medida 60. Calcular su volumen si en ésta se puede inscribir una esfera máxima de radio R.

A) $6\pi R^3$ B) $12\pi R^3$ C) $3\pi R^3$

D) $4\pi R^3$ E) $18\pi R^3$

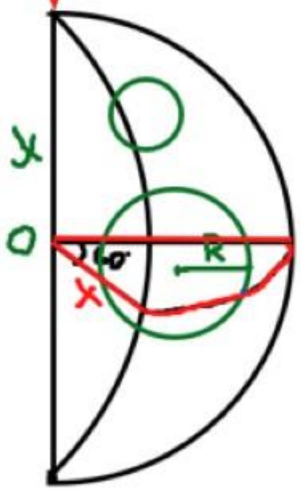
Resolución:

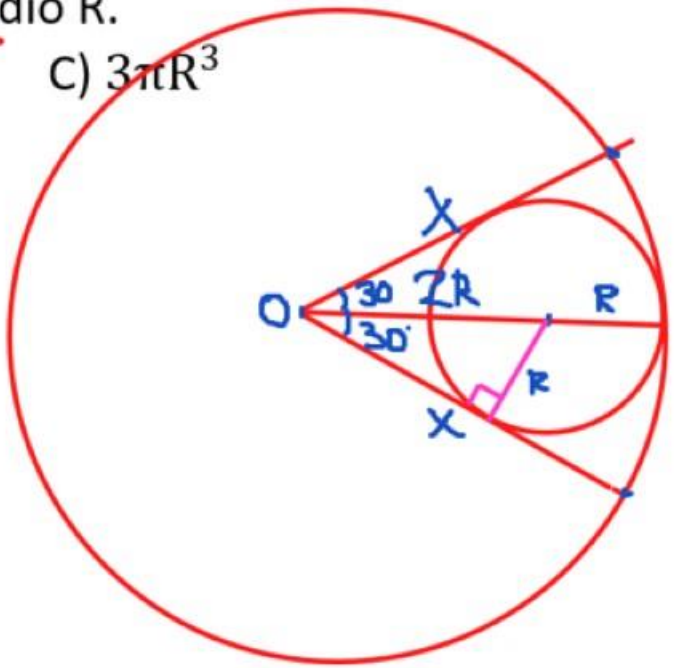
Rpta: C

11. Una cuña esférica es tal que los semicírculos que lo limitan determinan un diedro de medida 60. Calcular su volumen si en ésta se puede inscribir una esfera máxima de radio R.

A) $6\pi R^3$ B) $12\pi R^3$ C) $3\pi R^3$

D) $4\pi R^3$ E) $18\pi R^3$





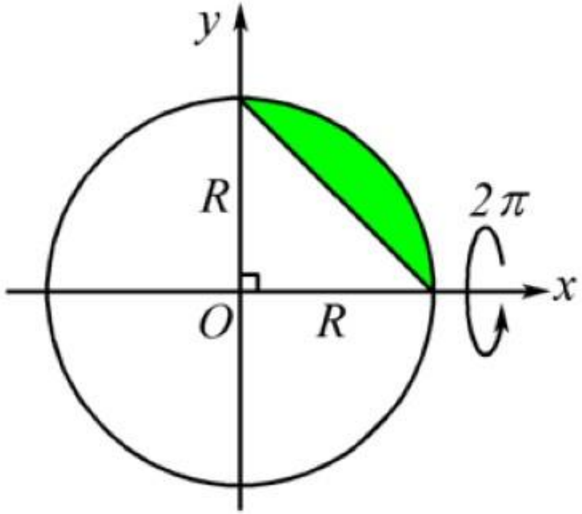
$X = 3R$

$V_{C.E.} = \frac{4}{3}\pi(3R)^3 \cdot \frac{60}{360}$

$\boxed{V_{C.E.} = 6\pi R^3}$

Rpta: A

12. Determine, en la siguiente figura, el volumen generado al rotar la región sombreada alrededor del eje x.



A) πR^3 B) $\frac{\pi R^3}{3}$ C) $\frac{\pi R^3}{4}$

D) $\frac{\pi R^3}{6}$ E) $\frac{\pi R^3}{9}$ (UNI 2012-2)

Resolución:

Rpta: B

13. Determina el volumen generado por el segmento que une los puntos (0,0) y (3,4), al ser rotado en torno de la recta diagonal del primer cuadrante del plano.

A) $\frac{7\pi}{6}$ B) $\frac{7\pi}{6\sqrt{2}}$ C) $\frac{7\pi}{6\sqrt{3}}$

D) $\frac{7\pi}{4\sqrt{2}}$ E) $\frac{7\pi}{2\sqrt{3}}$ (UNI 2015-2)

Resolución:

Rpta: B

PROBLEMAS

14. Un triángulo isósceles cuya base mide $2a$ unidades y cuya altura mide $3a$ unidades, gira alrededor de uno de sus lados. Calcule (en unidades cúbicas) el mayor volumen del sólido que de esta manera se genera.

A) $4\pi a^3$ B) $5\pi a^3$ C) $6\pi a^3$

D) $7\pi a^3$ E) $8\pi a^3$ (UNI 2010-2)

Resolución:

Rpta: C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

15. En un semicírculo cuyo radio mide R cm, se inscribe un triángulo rectángulo ABC ($\overline{AC}$ es diámetro) tal que al girar alrededor de la hipotenusa genera un sólido, cuyo volumen es la mitad del volumen de la esfera generada por dicho semicírculo. Entonces el área de la superficie esférica es al área de la región triangular ABC como:

A) $\frac{8\pi}{3}$ B) 3π C) 4π

D) $\frac{16\pi}{3}$ E) 8π (UNI 2013-2)

Resolución:

Rpta: C

PROBLEMAS

16. Una superficie esférica cuyo radio mide R unidades, está inscrita en un cono circular recto cuya generatriz es congruente con el diámetro de su base. Entonces, el volumen del sólido limitado por el tronco de cono determinado por la base del cono y el círculo limitado por la circunferencia de tangencia entre el cono y la esfera es:

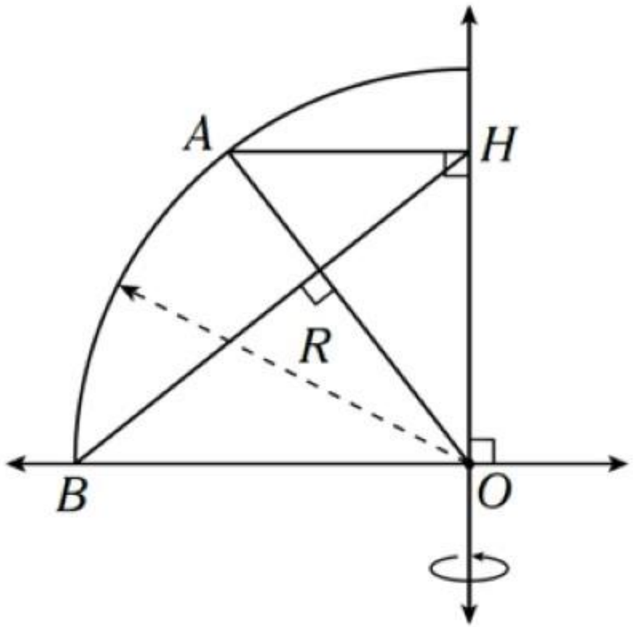
A) $\frac{21\pi R^3}{8}$ B) $\frac{16\pi R^3}{3}$ C) $\frac{19\pi R^3}{4}$

D) $\frac{9\pi R^3}{2}$ E) $\frac{15\pi R^3}{2}$

Resolución:

Rpta: A

17. Si el arco AB gira 360° respecto a la recta HO, determina una zona esférica. Calcule el área de la zona si $R = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$.



A) π B) 2 π C) 3 π

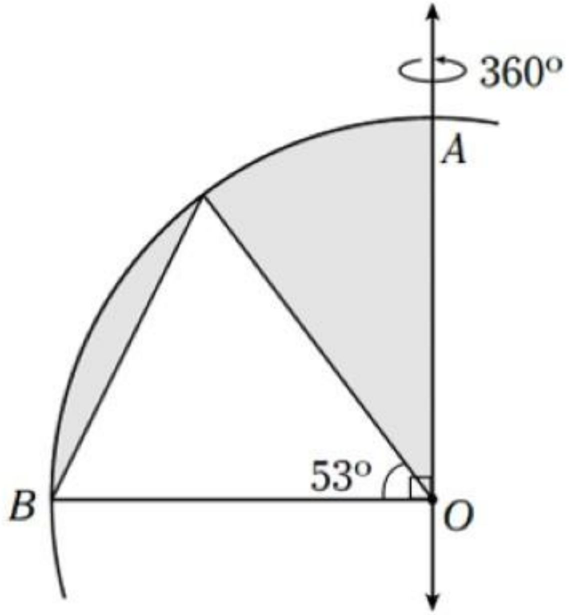
D) 4 π E) $\pi\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

Resolución:

Rpta: B

PROBLEMAS

18. Calcule la razón de volúmenes de los sólidos que se generan al girar las regiones sombreadas 360° respecto de la recta AO.



A) 3/5 B) 4/5 C) 1
D) 6/5 E) 8/5

Resolución:

Rpta: B

PROBLEMAS

19. En un triángulo ABC, la altura $\overline{\mathrm{AH}}$ mide 6 m, el triángulo gira una vuelta alrededor de $\overline{\mathrm{AC}}$. Calcule el volumen sólido generado, si el área generada por $\overline{\mathrm{BC}}$ es igual a 150 m^2.

A) 200 m^3 B) 250 m^3 C) 300 m^3

D) 320 m^3 E) 350 m^3

Resolución:

Rpta: C

PROBLEMAS

20. En un rectángulo ABCD, la diagonal $\overline{AC}$ mide 2a y forma con el lado $\overline{AB}$ un ángulo agudo que mide 30. La región rectangular gira alrededor de la recta BX paralela al lado $\overline{CA}$. Entonces la razón entre el área de la superficie que genera el rectángulo ABCD y el volumen del sólido generado por la región rectangular ABCD es:

A) $\frac{3(3+\sqrt{3})}{4a}$ B) $\frac{2(3+\sqrt{3})}{3a}$ C) $\frac{(3+\sqrt{3})}{2a}$

D) $\frac{3+\sqrt{3}}{3a}$ E) $\frac{3(3+\sqrt{3})}{2a}$

Resolución:

Rpta: B

FIN

MUCHAS
GRACIAS